

Un Modelo Praxeológico de Referencia para la pregunta *¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas?*

Karina Rizzo^(1,2), Viviana Costa⁽¹⁾

¹ IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata.

² Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda- Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N° 24

¹ yacosta@ing.unlp.edu.ar

^{1,2} karinarizzo71@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) para un Recorrido de Estudio e Investigación, propuesto para cursos de quinto año de la escuela secundaria Argentina. Este dispositivo didáctico, surgido del concurso FotoGebra, inicia el proceso de estudio y de actividad matemática con la pregunta *¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas?* El objetivo de la construcción del MPR es mostrar la amplitud de esa pregunta, que permite una gran diversidad de preguntas derivadas, la construcción de varios contenidos matemáticos, incluyendo funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trozos, contenidos de geometría plana y espacial, además de la hacer surgir naturalmente el proceso de modelización matemática a partir del uso de una foto y de GeoGebra.

Palabras clave: modelo praxeológico de referencia; modelización matemática; recorrido de estudio e investigación; funciones matemáticas; GeoGebra.

Introducción

En este trabajo se presenta un *Modelo Praxeológico de Referencia* (MPR) como instrumento metodológico propio de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) (Gascón, 2014). Esta teoría, desarrollada por Yves Chevallard (2007; 2017), busca comprender la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural y considera que esta disciplina es una forma específica de actividad humana. Dentro de esta teoría, se considera que las matemáticas son una construcción social y cultural que tiene su propio lenguaje y reglas. En este contexto, un *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI), es un dispositivo didáctico (Parra, Otero, 2018), que implica organizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje a partir de plantear preguntas y buscar respuestas, en lugar de enfocarse únicamente en los contenidos matemáticos (OM). Las preguntas parten de una denominada *pregunta generatriz*, cuestión amplia y abierta que guía el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta pregunta actúa como punto de partida para plantear preguntas derivadas o más específicas y buscar respuestas. Durante el proceso se construye y se transmite el conocimiento matemático en el aula. En un REI, el MPR se utiliza para analizar las prácticas, el *saber y saber-hacer*, que incluye el bloque *teórico-tecnológico* y el práctico de las *técnicas-tareas*, que en el marco de la TAD se denomina *praxeología matemática* y cuáles OM puedan desarrollarse y construirse, que surgen en relación con la pregunta planteada. Estos elementos dependen de cuán amplia es la pregunta generatriz, el contexto y nivel educativo donde se pretende implementar el REI.

Recorrido de Estudio e Investigación

En particular, se presenta un MPR para un REI (ideado desde un concurso denominado FotoGebra(<https://www.fotogebra.org/>) (Rizzo, K. 2016; Rizzo, K. 2021) que inicia con la pregunta:

*¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una fotografía,
GeoGebra y funciones matemáticas?*

que denominaremos P_0 , que se propone implementar en un quinto año de la escuela secundaria en Argentina con jóvenes de entre 15 a 16 años para el estudio de funciones matemáticas.

En un REI, los estudiantes trabajan en grupo y mediante la investigación e indagación en diversos *media* (fuentes de información), exploran P_0 . En un primer encuentro con esa pregunta, plantearán una situación problema utilizando una fotografía por ellos realizada. Una posible resolución de la situación problema planteada a través de una fotografía y usando GeoGebra, incluye la *modelización matemática* de objetos o de trazas imaginarias en la misma. Eso consiste en utilizar herramientas y técnicas matemáticas para analizar y describir los objetos presentes en la foto, para luego resolver el problema planteado. La modelización matemática implica identificar y representar los objetos de la foto mediante conceptos y variables matemáticas adecuadas (Bosch, Gascón e Higuera, 2006; Serrano Martínez, 2013). Esto puede implicar medir dimensiones, calcular áreas, volúmenes o realizar estimaciones cuantitativas. Para ello,

se utilizan ecuaciones, fórmulas y relaciones matemáticas para establecer conexiones entre los elementos de la foto y resolver la situación problema. El proceso de modelización matemática también implica interpretar y analizar los resultados obtenidos a través de los cálculos y las representaciones matemáticas. Además, dado que la pregunta generatriz propone que se utilicen *funciones para resolver*, los estudiantes tendrán ineludiblemente que “ver” o imaginar “funciones” en la imagen fotográfica vinculado a la situación problema que plantean. Por ejemplo, con *funciones lineales*, es posible modelar bordes rectos, bordes de un cuadro, de un rectángulo o un paralelogramo. Las *funciones cuadráticas* pueden utilizarse para modelar bordes curvos, por ejemplo, el borde de un arco (si este no es parte de una circunferencia), una cúpula, el borde de una copa de vino, la trayectoria de una pelota, entre otros. Las *funciones cúbicas*, pueden utilizarse para modelar bordes más complejos con curvaturas más pronunciadas, por ejemplo, modelar el borde de una esfera o una forma más elaborada como una hoja, una flor o un automóvil. Las *funciones exponenciales*, pueden modelar el borde suave que presenta un decaimiento o crecimiento, por ejemplo, el borde de una rampa de skate, una lámpara; y las *logarítmicas* pueden ser utilizadas para modelar bordes de figuras u objetos que exhiben una relación de proporcionalidad inversa, como curvas de decaimiento, efectos de compresión y curvas de crecimiento asintótico. Es importante destacar que la elección de la función adecuada para modelar los bordes de figuras u objetos depende de la forma y las características específicas de dichos bordes. Además, es posible combinar diferentes funciones (*funciones a trozos*) para obtener una representación más precisa de los bordes complejos. Una *técnica para modelar matemáticamente con funciones*, es colocar la imagen fotográfica en la Vista Gráfica de GeoGebra, insertar puntos adecuadamente y mediante la herramienta Ajuste seleccionar el ajuste deseado: exponencial, lineal, cuadrático, entre otros. De este modo se obtiene la función, y a partir de su expresión algebraica, es posible operar matemáticamente, combinado con otras posibles OM y mediante tareas y técnicas adecuadas, buscar respuesta a la situación problema. Esto se observa en la figura 1 y figura 2, en la que se han obtenido expresiones funcionales a partir del ajuste de datos sobre la imagen insertada en la Vista Gráfica de GeoGebra.

En la figura 1, el recorrido que describe el ciclista al bajar una colina, se ajusta con una función logarítmica $f(x) = -2,61 + 3,76 \ln(x)$, obtenida mediante el comando “AjusteLog”.

En el caso de los chorros de agua de la fuente, se pueden modelar ajustando los puntos con una función polinómica de grado dos. Para ello se utiliza la expresión en forma canónica de la parábola y con la manipulación de deslizadores, se obtiene la expresión $f(x) = -0,6(x-3,2)^2 + 2$, también es posible utilizar el comando “AjustePolinómico” o desde la vista “Hoja de cálculo”, seleccionar “Análisis de regresión de dos variables” y “modelo de regresión polinómico”. Además, en este caso, se acota el dominio de dicha función, para que las ramas de la parábola se encuentren en el intervalo donde está definida la imagen, según la fotografía, utilizando para esto el comando “Función” o el condicional “Si”.

En cuanto a la modelización matemática de la imagen que se observa en la figura 2, podemos destacar que, podría estar realizándose sólo el modelado de uno de los

“bordes” del cono con la herramienta “Segmento” o bien con un “AjusteLineal”, para luego de acotar el dominio y utilizar el comando “Superficie” y obtener el cono de helado en la vista 3D.

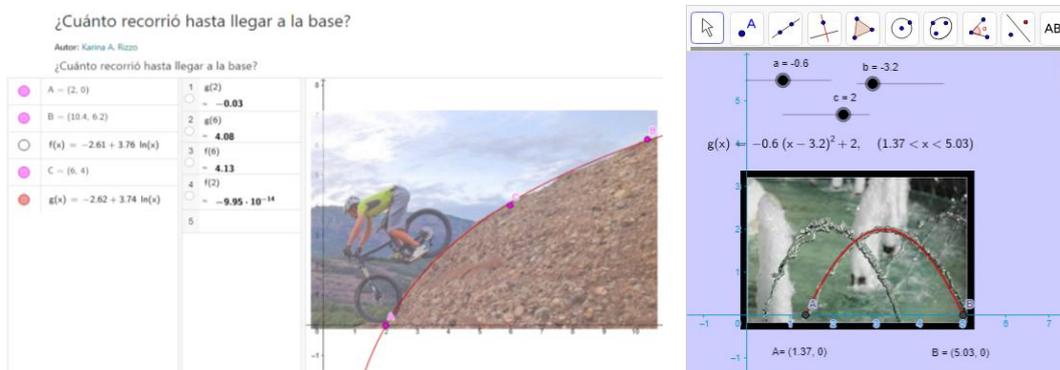


Figura 1: Modelización matemática en GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/bpn77d3c> y <https://www.geogebra.org/m/whp5nz2a>

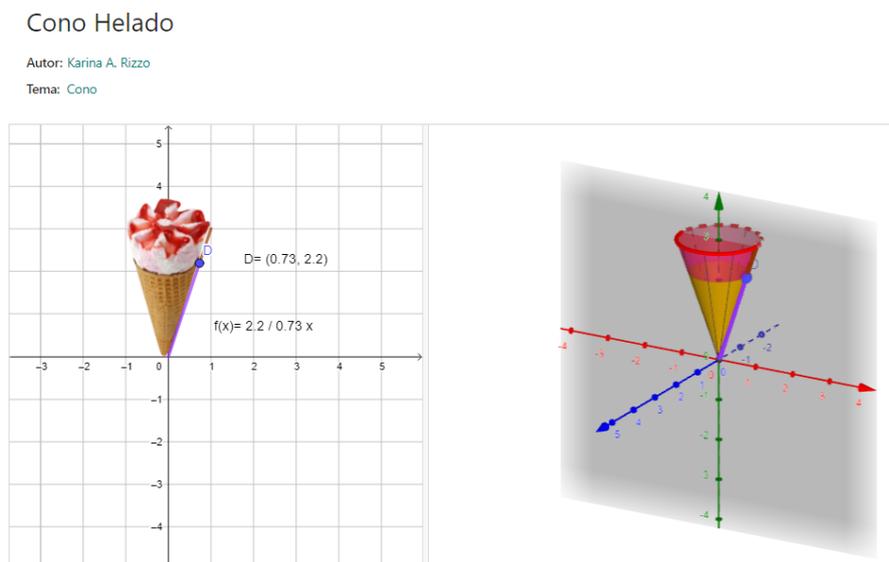


Figura 2: Modelización matemática de un cono helado en GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/fcwdqpsq>

Luego de obtener la *función* adecuada al objeto modelado, con ella es posible, realizar diversas *tareas* (cálculos matemáticos) que, mediante ciertas *técnicas*, resolver una amplia variedad de problemas. Por ejemplo, hallar máximos y mínimos, calcular medidas de longitud, áreas y volúmenes.

Resultados

En base a lo anterior, un MPR para la pregunta generatriz dada, se construye a partir de las preguntas derivadas, que pueden ubicarse en diferentes niveles:

- P₁ ¿Cómo plantear una situación problemática real?

- ¿Cómo modelizar matemáticamente la situación problema? ¿Qué variables involucrar? ¿Cuáles medidas utilizar? ¿El cálculo de qué medidas se necesitan? ¿Cómo resolverlo? ¿Cómo usar GeoGebra para resolverlo?
- P₂ ¿Qué fotografía realizar?
 - ¿Cómo tomar la fotografía? ¿Es dinámica? ¿Qué encuadre? ¿Cuáles son las reglas de composición? ¿Hay armonía y equilibrio en los elementos? ¿Transmite alguna sensación o emoción a quien la observa? ¿Cómo capturo “matemática” en una foto? ¿Cómo puedo sacar medidas con una foto? ¿Cómo obtener de la fotografía la respuesta buscada?
- P₃ ¿Cómo se utiliza GeoGebra?
 - ¿Cómo insertar una imagen allí? ¿Qué herramientas dispone? ¿Cuáles son las diferentes vistas y cuáles usar? ¿Qué comandos posee? ¿Cuáles herramientas y comandos se podrán usar para resolver mi situación?
- P₄ ¿Cuáles funciones matemáticas utilizar?
 - ¿Cuáles conozco? ¿Función lineal? ¿Función cuadrática? ¿Función polinómica de grado mayor a dos? ¿Función exponencial? ¿Función logarítmica? ¿Función racional? ¿Función a trozos? ¿Cómo “dibujar funciones” sobre una imagen? ¿Existe una función diferente a las que conozco que se ajuste mejor? ¿Para qué sirven esas funciones a fin de dar respuesta al problema?

Otras preguntas que se vinculan con las mencionadas y se entrelazan: ¿Qué considerar para redactar una situación problemática relevante? ¿El problema es de respuesta rápida? ¿Cómo estudiar una situación problemática real utilizando una foto con GeoGebra? ¿Cómo establecer la proporción de las medidas reales y las de la imagen? ¿Para qué utilizar GeoGebra? ¿Cómo obtener la respuesta a la situación planteada? Lo podré resolver con GeoGebra ¿estarán las herramientas que necesito?, entre otras.

Las OM que se estarían encontrando y estudiando, durante el REI, para dar respuesta a las preguntas P_i en un 5to año de escuela secundaria (Diseño Curricular para la educación secundaria, 2011), son:

- Funciones: lineales, cuadráticas, polinómicas de mayor grado a dos, exponencial, logarítmica, homográficas, a trozos, racional. Función: dominio, imagen, rango, extremos de una función en su dominio, ejes cartesianos, punto, recta en el plano, funciones que resultan de hacer un ajuste de puntos.
- Punto, plano cartesiano, rectas, segmentos, parábolas, circunferencias, arcos de circunferencia, ángulos, cuerpos geométricos.
- Ecuaciones, inecuaciones, Sistemas de ecuaciones.

Las *praxeologías* a utilizar y desarrollar, incluyen:

- Bloque teórico-tecnológico:
 - Álgebra, Geometría plana y espacial, Cálculo.
- Bloque práctico:
 - *Tareas*: modelar; graficar; calcular, calcular longitudes, áreas, calcular ceros de una función (si existen); volúmenes, volúmenes de revolución;

ajustar un conjunto de puntos: Ajuste de puntos (Calcula una función, con el método de mínimos cuadrados, que se ajusta a los puntos indicados), AjusteBaseExp, AjusteExp, AjusteImplícita, AjusteLineal, AjusteLog, AjusteLogístico, AjustePolinómico, AjustePotencia, AjusteRectaX (herramientas de GeoGebra); resolver, resolver ecuaciones, resolver sistemas de ecuaciones, resolver inecuaciones; intersecar, medir, convertir medidas de longitud y de áreas; optimizar (buscar máximos o mínimos); transformaciones geométricas a una función básica, como traslaciones, reflexiones, dilataciones o compresiones.

- *Técnicas*: adecuadas y/o conocidas por los estudiantes y/o que GeoGebra le ofrezca como herramienta; técnicas para calcular longitudes, áreas volúmenes, entre estas; técnicas de integración, técnicas de geometría, fórmulas de áreas de figuras planas y de sólidos; reglas de proporción directa para convertir medidas de diferentes unidades; técnicas para hallar ceros de una función.

Conclusiones

En conclusión, este trabajo presenta un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) basado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para implementar un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, en un quinto año de la escuela secundaria Argentina. El MPR se utiliza para analizar las prácticas matemáticas y las posibles formas de construir y desarrollar objetos matemáticos (OM) relacionados con una pregunta generatriz. En este caso, se propone un REI centrado en la utilización de una fotografía, GeoGebra y funciones matemáticas para resolver situaciones problemáticas reales. El MPR aborda preguntas derivadas en distintos niveles, que involucran la formulación de situaciones problemáticas, la elección y captura de fotografías, el uso de GeoGebra y la selección de funciones matemáticas adecuadas. Además, luego de implementado el REI es deseable volver al MPR de referencia y observar cuál es el recorrido que realmente se llevó adelante. Los resultados de este trabajo contribuyen a enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, brindando herramientas para la modelización matemática y el análisis de situaciones problemáticas a través de la tecnología y el uso de funciones matemáticas.

Referencias bibliográficas

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz Higuera, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Educación Matemática*, 18(2), 37-74.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En

- Ruiz Higuera, L., Estepa, A. y García, F. J. (Eds.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp.705-746). Universidad de Jaén. Recuperado de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8
- Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, 20 (1), 159–169.
- Dirección General de Cultura y Educación (2011). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria 5o año: Matemática-Ciclo Superior*. Provincia de Buenos Aires. Recuperado de: https://abc.gob.ar/secundaria/dc_5
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, n. 25 años, 99-123. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854006.pdf>
- Parra, V. y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 13(2), 7- 18.
- Rizzo, K. (2016). Concurso Matemática, Fotografía y GeoGebra. En Córdoba Gómez, F. J., Ciro López, L. A. y Molina García, J. C. (Eds.). *Congreso Latinoamericano de GeoGebra “Las TIC al servicio de la innovación educativa”* (161–164). Medellín, Colombia. Recuperado de: https://www.ugc.edu.co/sede/bogota/documentos/investigaciones/panel/geogebra_2016.pdf
- Rizzo, K. (2021). FotoGebra: un recurso educativo y creativo en tiempo de pandemia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 20, 180-191. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/48502>
- Serrano Martínez, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. Doctoral dissertation, Universitat Ramon Llull.